ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 31 AOUT 1925.

PRÉSIDENCE DE M. E.-L. BOUVIER.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

En déposant sur le bureau le troisième fascicule de l'*Inventaire des Périodiques scientifiques des bibliothèques de Paris* ([1]), M. A. Lacroix s'exprime ainsi :

Le fascicule que j'ai l'honneur d'offrir à l'Académie renferme la fin de l'inventaire que j'ai entrepris sous ses auspices.

Je tiens à rendre hommage à l'activité de nos collaborateurs et particulièrement à M. Léon Bultingaire. Grâce à eux, il a été inventorié dans les bibliothèques de Paris plus de 17000 périodiques scientifiques, morts ou vivants (exactement 16526 titres, avec, en outre, de très nombreux numéros *bis*); ces chiffres sont d'ailleurs de beaucoup inférieurs à la réalité, car fort nombreux sont les périodiques qui, au cours de leur existence, ont changé de nom, mais qui cependant ont été numérotés une seule fois sous leur dénomination primitive.

Je pense pouvoir apporter à l'Académie dans deux ou trois mois un dernier fascicule comprenant des tables géographiques et une table analytique qui faciliteront grandement les recherches pour le cas où le lecteur ne connaît pas le titre exact du périodique qu'il désire.

([1]) *Inventaire des Périodiques scientifiques des bibliothèques de Paris*, dressé sous la direction de M. A. Lacroix par M. Léon Bultingaire, avec la collaboration des bibliothécaires de Paris et le concours de M. Ad. Richard; fasc. III (Mo à Z). Masson, éditeur; 1925.

OPTIQUE. — *Sur une modification de la méthode photométrique de Lord Rayleigh, qui en rend possible l'emploi dans la photométrie avec une surface diffusante de comparaison.* Note (1) de M. **André Blondel.**

Dans les luxmètres ou photomètres portatifs, on compare généralement l'éclairement d'une surface détaillée par une source à étudier avec une surface diffusante étalon dont l'éclairement est variable. Ces appareils ne permettent pas ordinairement de mesurer les intensités de sources très éloignées. Je me suis proposé de leur appliquer la méthode photométrique de Lord Rayleigh consistant à mesurer la brillance d'un objectif pointé sur la source, tout en conservant l'emploi fort commode de la surface diffusante de comparaison. On peut ainsi éviter les coins absorbants (jamais neutres) que nécessite l'emploi d'une source ponctuelle de comparaison; et l'on conserve l'affaiblissement par diaphragmation, qui permet de réaliser une graduation proportionnelle (à variation linéaire) (2).

Rappelons d'abord qu'en employant comme source lumineuse la surface de l'objectif ayant pour foyers conjugués la source étudiée et l'œil de l'observateur, on augmente la sensibilité dans une forte proportion par rapport à celle que donne l'observation d'un écran diffusant éclairé par la même source.

En effet, si l'on appelle E l'éclairement dudit écran, k son coefficient de réflexion diffuse (albèdo), ds un élément de sa surface, φ l'angle d'émission des rayons diffusés vers l'œil, f la distance de ce dernier, R le rayon de la pupille, la pupille reçoit de l'élément ds un éclairement

$$e = \frac{kE}{\pi}\frac{1}{f^2} \tag{1}$$

et un flux de lumière

$$F = \pi R^2 e = kE\frac{R^2}{f^2}; \tag{2}$$

tandis que dans la méthode de Rayleigh une même surface élémentaire de

(1) Séance du 24 août 1925.

(2) A ces deux points de vue, le dispositif qu'on va décrire diffère complètement de celui de l'excellent photomètre imaginé et décrit dans plusieurs publications, il y a quatre ans, par MM. Fabry et Buisson. Dans les spectrophotomètres construits suivant la méthode de Rayleigh, l'affaiblissement est réalisé autrement, et d'une manière très imparfaite, par variation de largeur des fentes.

l'objectif envoie dans l'œil un flux

$$F' = k' E ds \tag{3}$$

en appelant k' le coefficient de la lentille. Ce dernier est voisin de l'unité, tandis que, pour un verre opalin, il varie entre 0,30 et 0,80, et peut même descendre encore plus bas si l'on emploie des verres opalins très épais.

Le coefficient de majoration de l'éclairement apparent observé par la méthode de Rayleigh par rapport à celle du verre diffusant est donc finalement

$$\eta = \frac{k'}{k} \frac{R^2}{f^2}. \tag{4}$$

Quand on veut employer cette méthode dans mon luxmètre, où la surface de comparaison est un verre opalin éclairé par une source indépendante, on se heurte immédiatement à une difficulté de principe : la brillance apparente de l'objectif ne varie pas avec l'ouverture de cette pupille, parce que la lumière est concentrée au centre de l'ouverture de la pupille placée au foyer et n'occupe qu'une faible partie de la surface de cette pupille; la rétine reçoit donc toujours le flux lumineux entier qui lui est renvoyé. Au contraire, le flux de lumière qui lui provient de la surface de comparaison, variera avec l'ouverture de la pupille, ouverture constamment variable, suivant les conditions de l'éclairage ambiant; on sait que le diaphragme d'ouverture de la pupille peut être de 3^{mm} à 4^{mm} environ par exemple en plein soleil et 8^{mm} dans l'obscurité.

La méthode de Rayleigh est donc inutilisable dans un luxmètre construit à la manière ordinaire. Pour éviter cet inconvénient, j'ai eu recours à l'artifice suivant : placer devant la pupille une pupille artificielle de diamètre fixe, assez faible pour rester inférieure à l'ouverture totale de la pupille, même quand on déplace légèrement l'œil, mais assez grande pour laisser embrasser complètement la tache de diffusion correspondant à l'image focale donnée par la lunette, et d'autre part pour ne pas affaiblir trop la quantité de lumière reçue de la plage de comparaison par la rétine; car tout affaiblissement de ce côté entraîne la nécessité de renforcer l'éclairement de la plage de comparaison, si l'on veut rester dans les limites de bonne sensibilité pour la comparaison photométrique.

Il faut donc dans les formules précédentes remplacer R par le rayon r de la pupille artificielle.

Un diamètre de 4^{mm} paraît convenable, car il ne réduit guère que de moitié l'éclairement apparent correspondant aux conditions moyennes

d'ouverture de la pupille, et il permet un centrage convenable. On ajoute, d'ailleurs, la pupille artificielle pour la méthode de Rayleigh seulement, et l'on peut l'enlever lorsqu'on emploie la méthode ordinaire de comparaison des deux écrans.

L'équation donnant l'égalité des brillances de l'objectif et de l'écran devient, en appelant E et E′ les éclairements différents qu'ils reçoivent,

$$k'E'\frac{r^2}{f^2} = kE = k\frac{I}{x^2}, \tag{5}$$

en appelant I l'intensité de la source, x sa distance.

Grâce à l'emploi de la pupille artificielle, l'appareil s'applique aussi facilement à la mesure des brillances de petites surfaces; la petite surface à étudier est placée au foyer d'un objectif grossissant, et les rayons parallèles renvoyés par ce dernier traversent le prisme et sont reçus par l'objectif de la lunette; le diamètre de l'objectif microphotométrique servant de collimateur est choisi assez grand pour donner une surface de comparaison convenable; la petite surface à étudier doit, d'autre part, être assez grande pour que son image grossie formée sur la pupille artificielle ait un diamètre plus grand que cette dernière.

Ce dispositif microphotométrique se prête à une application intéressante pour la mesure du pouvoir absorbant d'une lunette ou d'un appareil optique quelconque, en réglant l'objectif microphotométrique de façon que son foyer se trouve sur l'anneau oculaire de l'appareil à étudier. Il suffit de faire viser par l'objectif de la lunette étudiée une surface blanche éclairée d'une manière uniforme et constante; on mesure d'abord à l'aide du photomètre la brillance de l'anneau oculaire, puis on enlève la lunette étudiée et l'on mesure directement la brillance de la surface blanche éclairée sans modifier le réglage de l'objectif microphotométrique.

Un oculaire ajouté à l'objectif de visée à faible grossissement, permet d'orienter préalablement le photomètre.

Le rapport des deux lectures donne le coefficient d'absorption de l'appareil optique étudié [1].

---

[1] Cette méthode répond aux desiderata formulés récemment par la Commission de Contrôle de la Construction, de l'Institut d'Optique.

CORRESPONDANCE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions hypergéométriques confluentes.* Note [1] de M. **Michel Akimoff**, transmise par M. Appell.

Prenons pour point de départ l'expression de la transcendante de Riemann

$$\mathrm{P}\left|\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \end{matrix}\right|, \qquad \alpha'+\alpha''+\beta'+\beta''+\gamma'+\gamma''=1,$$

par l'intégrale

$$\text{const.}\,(a-x)^{\alpha'}(b-x)^{\beta'}(c-x)^{\gamma'}\int_{\mathrm{C}}(1-av)^{\alpha}(1-bv)^{\beta}(1-cv)^{\gamma}(1-xv)^{\delta}\,dv,$$

où

$$\alpha=-\alpha'-\beta''-\gamma'', \quad \beta=-\alpha''-\beta'-\gamma'', \quad \gamma=-\alpha''-\beta''-\gamma', \quad \delta=-\alpha'-\beta'-\gamma'$$

et le chemin d'intégration C est une courbe entourant deux points singuliers de la fonction sous le signe de l'intégrale et fermée sur la surface de Riemann correspondante.

En faisant confluer en un point transcendant successivement deux, trois et tous les quatre points singuliers de la fonction sous le signe de l'intégrale, on obtient les fonctions P confluentes suivantes :

(1) $$\underset{\lambda=\infty}{\mathrm{P}}\left|\begin{matrix} 0 & \infty & \lambda & \\ m & \lambda_1 & \lambda_1 & x \\ -m & \lambda_2 & \lambda_2 & \end{matrix}\right| = \underset{\lambda=\infty}{\mathrm{P}}\left|\begin{matrix} 0 & 2\lambda & -2\lambda & \\ m & \lambda_1 & \lambda_1 & x \\ -m & \lambda_2 & \lambda_2 & \end{matrix}\right| \text{[2]} = \text{const. } x^m \int_{\mathrm{C}} e^{ux}(1-u^2)^{m-\frac{1}{2}}\,du,$$

(2) $$\underset{\mu=\infty}{\mathrm{P}}\left|\begin{matrix} -\mu & \infty & \mu & \\ \mu_1+m & 2\mu_1 & \mu_1+m & x \\ \mu_2-m & 2\mu_2 & \mu_2-m & \end{matrix}\right| \text{[3]} = \text{const. } e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{\mathrm{C}} e^{-u^2+2ux}\,u^{2m-\frac{1}{2}}\,du,$$

(3) $$\underset{\nu=\infty}{\mathrm{P}}\left|\begin{matrix} \nu & \rho\nu & \rho^2\nu & \\ \nu_1 & \nu_1 & \nu_1 & x \\ \nu_2 & \nu_2 & \nu_2 & \end{matrix}\right| \text{[4]} = \text{const.} \int_{\mathrm{C}} e^{-\frac{u^3}{2}+\frac{3}{2}ux}\,du,$$

---

[1] Séance du 24 août 1925.

[2] F. Klein, *Vorlesungen über die hypergeometrische Function*, Göttingen, 1894 (réimpression, 1906), p. 158, 281-283. — R. Olbricht, *Studien über die Kugel- und Cylinderfunctionen* (*Nova Acta Academiæ Cæsaræ Leopoldino-Carolinæ,* Halle, 1888, p. 1-48).

[3] M. Akimoff, *Sur les cas limites de la fonction* P *de Riemann* (*Annales de l'Institut des Mines à Saint-Pétersbourg*, 1, 1907, p. 87-91, en russe).

[4] M. Akimoff, *loc. cit.*

où

$$2(\lambda_1+\lambda_2)=4(\mu_1+\mu_2)=3(\nu_1+\nu_2)=1, \qquad \rho=e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

$$\lim\frac{\lambda_1}{\lambda}=\lim\frac{2\mu_1}{\mu^2}=\lim\frac{(2\nu_1)^2}{\nu^3}=1,$$

le chemin d'intégration C, déterminé précédemment, ayant subi la déformation continue avec le déplacement des points singuliers.

La transformation rationnelle de Riemann donne pour les fonctions (1) et (2) du cylindre circulaire et parabolique ces autres expressions :

$$\underset{\lambda=\infty}{P}\left|\begin{matrix} 0 & \infty & 4\lambda^2 & \\ \frac{m}{2} & \frac{1}{2} & \lambda_1 & x^2 \\ -\frac{m}{2} & 0 & \lambda_2 & \end{matrix}\right| = \text{const.}\, x^m \int_C e^{u+\frac{x^2}{4u}} u^{-m-1}\, du,$$

$$\underset{\mu=\infty}{P}\left|\begin{matrix} 0 & \infty & \mu^2 & \\ \frac{1}{2} & \mu_1 & \mu_1+m & x^2 \\ 0 & \mu_2 & \mu_2-m & \end{matrix}\right| = \text{const.}\, x\, e^{-\frac{x^2}{2}} \int_C e^{ux^2} u^{m-\frac{1}{4}} (1-u)^{-m-\frac{1}{4}}\, du.$$

Ces fonctions apparaissent donc comme cas particuliers d'une seule fonction P confluente plus générale ([1])

$$\underset{k=\infty}{P}\left|\begin{matrix} 0 & \infty & k & \\ m & k_1+p & k_1+n & x \\ -m & k_2+p & k_2-n & \end{matrix}\right|, \quad 2(k_1+k_2+p)=1, \quad \lim\frac{k_1}{k}=\lim\left(-\frac{k_2}{k}\right)=1.$$

Quant à l'intégrale (3), en vertu d'une autre transformation de Riemann, elle s'exprime par la fonction spéciale du cylindre circulaire

$$\underset{\nu=\infty}{P}\left|\begin{matrix} 0 & \infty & \nu^3 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \nu_1 & x^3 \\ 0 & 0 & \nu_2 & \end{matrix}\right| = x^{\frac{1}{2}} \underset{\nu=\infty}{P}\left|\begin{matrix} 0 & \infty & \nu^3 & \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \nu'_1 & x^3 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \nu'_2 & \end{matrix}\right|, \quad \nu'_1+\nu'_2=\frac{1}{2}, \quad \lim\frac{(2\nu'_1)^2}{\nu^3}=1.$$

Je me borne ici à remarquer que les intégrales plus générales

$$\int_C e^{x_1u+x_2u^2+\ldots+x_nu^n} u^{-m-1}\, du \quad \text{et} \quad \int_C e^{x_1\left(u-\frac{1}{u}\right)+x_2\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right)+\ldots+x_n\left(u^n-\frac{1}{u^n}\right)} u^{-m-1}\, du,$$

([1]) F. Schilling, *Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarz'schens-Function* (*Mathematische Annalen*, 44, 1894, § 18, p. 227-230). — E.-T. Whittacker and G.-N. Watson, *Modern Analysis*, 1920, p. 337.

qui se rencontrent dans la théorie des fonctions de Fourier-Bessel généralisées, peuvent être considérées comme cas de dégénérescence des intégrales de M. Goursat [1]. Elles rentrent aussi dans la classe des fonctions hypergéométriques à plusieurs variables d'ordre supérieur étudiées pour le cas de deux variables par M. Kampé de Fériet [2].

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la sommation des séries de Fourier des fonctions analytiques.* Note de M. **Nicola Obrechkoff**, présentée par M. Émile Borel.

La série de Fourier d'une fonction holomorphe autour de la ligne $0 \ldots 2\pi$, exception faite des fonctions périodiques avec la période 2π, est ordinairement divergente et non sommable par le procédé de Cesàro pour des valeurs imaginaires de l'argument. Dans cette Note nous démontrons que, dans certaine région, la série est sommable avec le procédé classique de M. Borel; en même temps, les séries de Laurent des branches de certaines fonctions multiformes sont sommables.

Soit $z = x + iy$ et désignons par Γ la région définie ainsi : pour $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ et pour $3\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi$, on a

$$|y| \leqq \log \frac{1}{\cos x},$$

et pour $\frac{\pi}{2} < x < 3\frac{\pi}{2}$,

$$|y| \leqq \infty.$$

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans G ($0 \leqq x \leqq 2\pi$, $\alpha \leqq y \leqq \beta$, où $\alpha \leqq 0$, $0 \leqq \beta$) et continue sur le contour de G. Alors on a le théorème :

I. *La série de Fourier de $f(z)$ est sommable uniformément par le procédé de M. Borel dans la région* D *commune de* G *et* Γ, *et sa somme est égale à $f(z)$.*

Il s'agit de démontrer que l'intégrale $I = \int_0^\infty e^{-a} u(a)\, da$, où

$$u(a) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}(a_n \cos nz + b_n \sin nz),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\, dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \sin nt\, dt,$$

---

[1] *Acta Mathematica*, 2, 1883, p. 40-50.

[2] Voir P. Appell, *Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. III, 1925, p. 42).

a du sens et est égale à $f(z)$. On obtient facilement

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[e^{ae^{i(t-z)}} + e^{ae^{-i(t-z)}} - 1\right] dt.$$

Chez a_n et b_n on peut remplacer la ligne $0 \ldots 2\pi$ par les autres côtés du parallélogramme qui passe par $z = \mu + i\nu$, selon le théorème de Cauchy :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\nu i} f(t)\cos nt\, dt + \frac{1}{\pi}\int_{\nu i}^{\nu i + 2\pi} f(t)\cos nt\, dt + \frac{1}{\pi}\int_{\nu i + 2\pi}^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt,$$

et la même chose pour b_n. On aura

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = \int_0^{\infty} e^{-a}\, da \int_0^{\nu i} f(t)\varphi\, dt + \int_0^{\infty} e^{-a}\, da \int_{\nu i}^{\nu i+2\pi} f(t)\varphi\, dt \\ + \int_0^{\infty} e^{-a}\, da \int_{\nu i+2\pi}^{2\pi} f(t)\varphi\, dt = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3, \end{aligned}$$

où

$$2\pi\varphi = e^{ae^{i(t-z)}} + e^{ae^{-i(t-z)}} - 1.$$

L'intégrale

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^{\infty} e^{-a}\, da \int_0^{2\pi} f(u + \nu i)\left[e^{ae^{i(u-\mu)}} + e^{ae^{-i(u-\mu)}} - 1\right] du$$

n'est autre chose que la somme de M. Borel pour la fonction $f(u + \nu i)$ et parce que la série de Fourier est convergente pour u réel (la fonction admet des dérivées); donc elle est sommable et a la somme $f(\mu + i\nu) = f(z)$. L'intégrale I_1 est convergente absolument dans D parce que

$$2\pi\,|\varphi f(t) e^{-a}| < \mathrm{M} e^{-a}\left(1 + e^{ae^{\nu - y}\cos\mu} + e^{ae^{y-\nu}\cos\mu}\right),$$
$$t = yi, \qquad |f(t)| < \mathrm{M},$$

et $e^{\nu - y}\cos\mu < 1$, $e^{y-\nu}\cos\mu < 1$ dans Γ. La même chose est pour I_3. Donc on peut changer l'ordre d'intégration et on trouve que I_1 et I_3 sont égaux à nul. Avec la transformation $x = e^{iz}$ on obtient immédiatement :

II. *Soit* $f(z)$, $z = \rho e^{i\varphi}$, *une fonction holomorphe dans la couronne entre deux circonférences de rayon* r *et* R ($r < 1 < \mathrm{R}$), *à l'exception de la coupure* $r \ldots \mathrm{R}$ *sur les bords de laquelle elle est supposée continue. Si*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{f(t)}{t^{n+1}}\, dt, \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} f(t)\, t^{n-1}\, dt,$$

la série de Laurent $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n z^n + b_n z^{-n})$ *est sommable uniformément par la*

méthode de M. Borel dans la région B *définie ainsi :* $R \geqq \rho \geqq \max. (r, \cos\varphi)$ *et* $\rho \cos\varphi \leqq 1$, *et sa somme est égale à* $f(z)$.

En employant les autres méthodes de sommation exponentielle de M. Borel, on peut étendre la région de sommabilité.

ÉLASTICITÉ A DEUX DIMENSIONS. — *Solutions générales.* Note (¹) de M. **Kolossof**, présentée par M. Mesnager.

Je demande la permission de compléter les indications sur les applications de ma méthode indiquées précédemment (²).

Le théorème de M. Michell, démontré par M. Mesnager dans sa Note (³) et la théorie des distorsions de M. V. Volterra (⁴) peuvent être démontrés par ma méthode; elle n'exige pas que les forces, appliquées au contour, s'équilibrent, mais elles s'équilibrent avec les forces appliquées aux points de l'intérieur, concentrées en des points où les tensions augmentent infiniment.

Pour le cas des disques il est mieux d'introduire les coordonnées curvilignes ξ, η au moyen des formules

$$(1) \qquad z = f(\zeta), \qquad \zeta = \xi + i\eta, \qquad \frac{1}{h^2} = f'(\zeta) f_1'(\zeta_1),$$

$$(2) \qquad f'(\zeta) = \frac{1}{h} e^{i\theta} \qquad (\theta \text{ angle de l'axe } ax \text{ avec l'axe } \xi).$$

Par exemple

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = e^{-\zeta i}, \qquad \eta = \log r = \text{const. définissent une famille de cercles;} \\ z = a \cos\zeta = a \dfrac{e^{\zeta i} + e^{-\zeta i}}{2}; \quad \eta = \text{const., une famille d'ellipses :} \\ \qquad \dfrac{x^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 \eta} + \dfrac{y^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \eta} = 1; \\ z = a\sqrt{1 + 2^{-\zeta i}}; \quad \eta = \text{const., une famille de lemniscates :} \\ \qquad (x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^{\gamma} e^{2\eta}. \end{array} \right.$$

Pour les points infiniment éloignés, $\eta = \infty$.

Soient P et Q les efforts normaux sur les éléments perpendiculaires aux axes ξ, η et U les efforts tangentiels; u_ξ, v_η les déplacements suivant les

---

(¹) Séance du 20 juillet 1925.

(²) *Comptes rendus*, **181**, 1925, p. 24.

(³) *Comptes rendus*, **178**, 1924, p. 979.

(⁴) *Annales de l'École Normale*, **24**, 1907, p. 417.

axes ξ, η. Nous avons les formules de transformation

$$2U + i(P - Q) = [2T + i(N_1 - N_2)]\, e^{2\theta i}; \quad v_\eta + i u_\xi = (v + iu)\, e^{i\theta} = h f'(\xi)\,(v + iu)$$

et

$$(1^*) \qquad \frac{2U + i(P-Q)}{h^2} = \left(-\frac{i}{2} f_1(\zeta_1)\,\varphi'(\zeta) + F(\zeta) f'(\zeta)\right) f'(\zeta),$$

où

$$F(\zeta) = F[f(\zeta)], \qquad \varphi(\zeta) = \varphi[f(\zeta)],$$

$$(2^*) \qquad P + Q = N_1 + N_2 = \frac{1}{2}\{\varphi(\xi) + \varphi_1(\xi)\};$$

$$(3^*) \qquad \frac{4\mu(v_\eta + i u_\xi)}{h} = -\frac{i}{2} f'(\zeta)\left\{f_1(\zeta_1)\,\varphi(\zeta) + 2i\int F(z)\,dz - \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\int \varphi_1(z_1)\,dz_1\right\}.$$

En posant

$$\varphi(\zeta) = -iC\zeta + 2A + \frac{C}{2}, \qquad F(\zeta) f'(\zeta)^2 = Bi \qquad \text{(A, B, C des constantes)},$$

nous aurons

$$P + Q - C\eta + 2A + \frac{C}{2}, \qquad 2U + i(P - Q) = \left(-\frac{C}{2} f_1(\zeta_1) f'(\zeta) + Bi\right) h^2.$$

Pour le cas du cercle

$$f(\zeta) = e^{-\zeta i}, \qquad \eta = \log r, \qquad h = \frac{1}{r}, \qquad f_1(\zeta_1) f'(\zeta) = -ir^2,$$

$$P + Q = C \log r + 2A + \frac{C}{2},$$

$$2U + i(P - Q) = \left(\frac{Ci}{2} r^2 + Bi\right)\frac{1}{r^2} = \left(\frac{C}{2} + \frac{B}{r^2}\right) i;$$

$$U = 0, \qquad P = \frac{C}{2}\log r + A + \frac{C}{2} + \frac{B}{2r^2}, \qquad Q = \frac{C}{2}\log r + A - \frac{B}{2r^2} \quad (^1).$$

Soit $\eta = C$ l'équation d'intrados d'une voûte ou l'équation d'un trou et, pour $\eta = C$, $U = Q = 0$.

Pour satisfaire à cette équation, remarquons que

$$(4^*) \qquad 4(Q + iU) = \frac{f_1(\zeta_1)\,\varphi'(\zeta)}{f'_1(\zeta_1)} + 2i\,F(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f'_1(\zeta_1)} + \varphi(\zeta) + \varphi_1(\zeta_1)$$

et posons

$$(5^*) \qquad -2i\,F(\zeta) f'(\zeta) = f_1(\zeta - 2ci)\,\varphi'(\zeta) + f'_1(\zeta - 2ci)\,[\varphi(\zeta) + \varphi_1(\zeta - 2ci)].$$

---

(1) Ce sont les formules de M. de Belaevsky (*Comptes rendus*, **177**, 1923, p. 253). Elles sont données par M. Golowine en 1881 (*Annales de l'Institut technologique de Saint-Pétersbourg*, p. 380). Voir encore Belzecki, *Comptes rendus*, **140**, 1905, p. 1016.

En prenant

$$m\varphi(\zeta) = C_1 \sin m\zeta + iC_0 \cos m\zeta,$$

nous aurons une solution analogue à celle de M. de Belaevsky, et en prenant

$$m\varphi(\zeta) = C_1 \cos m\zeta + iC_0 \sin m\zeta,$$

à celle de M. Ribière [1]. Si nous avons une pièce tendue dans la direction de l'axe Ox avec la force p :

$$N_1 = p, \qquad N_2 = F = 0; \qquad \varphi(z) = p, \qquad F(z) = ip$$

et nous aurons

$$(4) \qquad P + Q = p, \qquad 2U + i(P - Q) = ipe^{2\theta i} = ip\frac{f'(\zeta)}{f'_1(\zeta_1)}.$$

S'il s'agit d'une pièce affaiblie par un trou $\eta = C$, il faut chercher $\varphi(\zeta)$ de manière que, pour les points très éloignés du trou, les valeurs $P + Q$ et $2U + i(P - Q)$ s'approchent infiniment de zéro, si pour $F(\zeta)$ on prend (5*). Il est facile de démontrer que, pour le cercle :

$$\varphi(\zeta) = p - 2pR^2e^{2\zeta i} = p - 2pe^{2\zeta i + 2c} \quad (^2);$$

pour l'ellipse :

$$\varphi(\zeta) = pe^{2c} + p(1 - e^{2c})i\cot\zeta \quad (^3)$$

et pour le cas de la lemniscate :

$$\varphi(\zeta) = p - 2pe^{\zeta i}\sqrt{1 + e^{-\zeta i}}\sqrt{1 - e^{\zeta i + 2c}} \qquad (^3).$$

ÉLASTICITÉ. — *Solution du problème de la plaque rectangulaire épaisse ayant deux côtés opposés appuyés et deux côtés libres, et portant une charge uniformément répartie ou concentrée en son centre.* Note de M. **Carl-A. Garabedian**, présentée par M. Mesnager.

J'ai donné récemment, dans une Note sur les poutres rectangulaires [4], la flèche de la plaque en l'étude (la charge étant uniforme). Bien que j'aie

---

(1) Pour le cas du cercle, les formules sont données par M. Ribière (*Comptes rendus*, **108**, 1889, p. 561; **132**, 1901, 315).

(2) Nous arrivons aux formules de M. Kirsch (*Zeitschrift des V. D. I.*, **42**, 1898, p. 797).

(3) Voir nos Mémoires, renvoi (2), *Comptes rendus*, **181**, 1925, p. 25.

(4) *Comptes rendus*, **179**, 1924, p. 381.

obtenu à cette époque la solution complète, elle se présentait sous une forme assez longue. Il m'a paru depuis intéressant de tâcher de l'exprimer au moyen de la solution de la plaque mince correspondante et ses dérivées comme je l'ai déjà fait pour la plaque encastrée ou posée ([1]). Je viens de réussir à écrire la solution de la plaque épaisse sous cette forme concise que je cherchais.

Prenons $x = 0$, $x = a$ comme côté posés; les côtés libres sont donc $y = 0$, $y = b$. Les faces sont $z = \pm h$, dont l'une ($z = h$) est soumise à la charge uniforme p par unité de surface.

Posons pour abréger

$$(1)\qquad A = (3+\sigma)\,\text{sh}\,\alpha b - (1-\sigma)\,\alpha b, \qquad \alpha = \frac{\pi i}{a},$$

i étant un des nombres impairs de la suite 1, 3, 5, ... En désignant par w_{0b} (je conserve les notations de mes Notes antérieures) la solution de la plaque mince, nous avons ([2])

$$(2)\qquad w_{0b} = -\frac{p}{24D}\left\{ a^3x - 2ax^3 + x^4 \right\} - \frac{4p}{aD}\sum \frac{\sin\alpha x}{\alpha^5 A}\left[\frac{\sigma(1+\sigma)}{1-\sigma}\left\{\text{sh}\,\alpha y + \text{sh}\,\alpha(b-y)\right\} - \sigma\left\{\alpha(b-y)\,\text{ch}\,\alpha y + \alpha y\,\text{ch}\,\alpha(b-y)\right\}\right],$$

([1]) *Comptes rendus*, 180, 1925, p. 257.

([2]) On arrive à cette solution rapidement convergente de la plaque mince, en suivant la méthode de M. Levy $\left(\text{comme l'a fait M. Estanave pour le cas } \sigma = \frac{1}{4}\right)$, et en se servant aussi de la relation suivante :

$$(i)\qquad \sum \frac{\sin\alpha x}{\alpha^5} = \frac{a}{96}\left\{ a^3x - 2ax^3 + x^4 \right\}.$$

Cette formule, et certaines autres qui en résultent par dérivation, se trouvent dans une brochure de M. Mesnager, *Moments et flèches des plaques rectangulaires minces* (*Annales des Ponts et Chaussées*, 3, 1916, p. 392). Pour arriver à notre solution de la plaque épaisse, il faut tenir compte de toutes ces relations.

Je pense que M. March a été le premier à écrire la solution sous sa forme (2). Il l'a obtenue *ab initio* en partant d'un essai de solution dont le polynome fait partie.

et pour la plaque épaisse il vient :

$$(3a)\quad u = -z\frac{\partial}{\partial x}w_{0b} - \frac{\sigma p(a-2x)h^3}{6(1-\sigma^2)D} - \frac{p(a-2x)h^2 z}{5(1-\sigma)D}$$
$$+\frac{h^2 z}{10(1-\sigma)}\left\{(2-3\sigma)\frac{\partial^3}{\partial x^3}w_{0b} - (2-\sigma)\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}w_{0b}\right\}$$
$$+\frac{(2-\sigma)z^3}{6(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla w_{0b} + \frac{(2-\sigma)h^2}{75(1-\sigma)}\left\{3h^2 z - 5z^3\right\}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\nabla w_{0b};$$

$$(3b)\quad v = -z\frac{\partial}{\partial y}w_{0b} - \frac{\sigma p(b-2y)h^3}{6(1-\sigma^2)D}$$
$$+\frac{h^2 z}{10(1-\sigma)}\left\{(2-3\sigma)\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}w_{0b} - (2-\sigma)\frac{\partial^3}{\partial y^3}w_{0b}\right\}$$
$$+\frac{(2-\sigma)z^3}{6(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial y}\nabla w_{0b} - \frac{(2-\sigma)h^2}{75(1-\sigma)}\left\{3h^2 z - 5z^3\right\}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\nabla w_{0b};$$

$$(3c)\quad w = w_{0b} + \frac{(ax-x^2)\,\mathrm{p}h^2}{5(1-\sigma)D} - \frac{h^2}{10(1-\sigma)}\left\{3(4-\sigma)\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{0b} + (8+\sigma)\frac{\partial^2}{\partial y^2}w_{0b}\right\}$$
$$+\frac{\sigma z^2}{2(1-\sigma)}\nabla w_{0b} - \frac{(8+\sigma)h^4}{25(1-\sigma)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\nabla w_{0b} - \frac{\mathrm{p}h^3 z}{3(1-\sigma^2)D}$$
$$-\frac{(5-3\sigma)\,\mathrm{p}h^2 z^2}{20(1-\sigma)D} + \frac{\sigma h^2 z^2}{5(1-\sigma)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\nabla w_{0b} + \frac{(1+\sigma)pz^4}{24(1-\sigma)D}.$$

Quant aux efforts divers, on les calcule facilement à l'aide des déplacements, si besoin est.

Pour obtenir les formules dans le cas d'une charge centrale ([1]), on n'a qu'à substituer à w_{0b} dans (3) la solution de la plaque mince ([2]) qui convient au problème, en faisant remarquer que cela entraîne $p = 0$, ce qui équivaut à supprimer en u, v, w les termes dans lesquels paraît explicitement la lettre p.

Je rappelle encore une fois que la plaque considérée peut être envisagée comme une poutre posée ([3]). En tout cas, nos résultats semblent avoir un intérêt pratique pour les ingénieurs. Notons aussi que l'expression du feuillet moyen exige, en plus de la formule approximative w_{0b}, deux termes correctifs de l'ordre de h^2 et h^4. Pour les remarques se rapportant au point de vue critique à la méthode que j'ai suivie, on est prié de se reporter à mes Notes citées ci-dessus.

([1]) *Comptes rendus*, 180, 1925, p. 257.

([2]) Je n'ai jamais vu imprimée la solution de ce problème sur les plaques minces, mais je pense que nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour le résoudre.

([3]) *Comptes rendus*, 179, 1924, p. 381.

ÉLASTICITÉ. — *Arcs circulaires d'épaisseur uniforme. Application aux barrages-voûtes.* Note de M. **Haegelen**, présentée par M. Mesnager.

D'après les résultats énoncés par M. Belsecki [1], on peut définir un état d'équilibre [2], satisfaisant rigoureusement aux équations de l'élasticité, par les formules

$$N = N_1 \cos\varphi + N_2, \qquad Z = Z_1 \sin\varphi,$$
$$N' = N'_1 \cos\varphi + N'_2, \qquad N'' = m(N + N') + E\alpha$$

avec

$$N_1 = Z_1 = dr + \frac{e}{r} + \frac{f}{r^3}, \qquad N'_1 = 3dr + \frac{e}{r} - \frac{f}{r^3},$$
$$N_2 = a + \frac{b}{r^2} + c\log r, \qquad N'_2 = a - \frac{b}{r^2} + c(1 + \log r).$$

Dans ces expressions a, b, c, d, e, f, α sont des constantes arbitraires, E le coefficient d'élasticité et m le coefficient de Poisson. N désigne l'effort normal dirigé suivant le rayon vecteur, N′ l'effort normal dirigé suivant la tangente à la fibre circulaire, Z l'effort tangentiel unique perpendiculaire à Oz, et N″ l'effort normal parallèle à Oz.

Supposons la corde de l'arc normale à l'axe d'origine des angles. Soient F la poussée d'encastrement, d_1 sa distance au centre de courbure de l'arc, et p la pression hydrostatique sur l'extrados.

Nous déterminerons les six constantes a, b, c, d, e, f, de façon que l'on ait, à l'intrados, pour $r = r_0$,

$$Z = N = 0,$$

et, à l'extrados pour $r = r_1$,

$$N = p, \qquad Z = 0,$$

avec

$$\int_{r_0}^{r_1} N'\delta r = F\cos\varphi + pr_1, \qquad \int_{r_0}^{r_1} Z\,\delta r = F\sin\varphi.$$

Nous aurons alors

$$\frac{c}{r_1^2 - r_0^2} = \frac{4Fd}{(r_1^2 - r_0^2)^2 - 4r_1^2 r_0^2 \log^2\frac{r_1}{r_0}} = -\frac{1}{r_1^2\log r_1 - r_0^2\log r_0}\left(a - p\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\right)$$
$$= \frac{1}{r_1^2 r_0^2 \log\frac{r_1}{r_0}}\left(b + p\frac{r_1^2 r_0^2}{r_1^2 r_0^2}\right) - \frac{e}{r_1^2 + r_0^2} = \frac{f}{r_0^2 r_1^2} = d = \frac{F}{r_1^2 - r_0^2 - (r_1^2 + r_0^2)\log\frac{r_1}{r_0}}$$

---

[1] *Comptes rendus*, **140**, 1905, p. 1016 et 1203.

[2] Nous avions obtenu directement ces résultats avant de connaître la Note de M. Belsecki.

et

$$\int_{r_0}^{r_1} N' r\, \partial r = F d_1 + p\left(\frac{r_1^2}{2} + \frac{r_1^2 r_0^2}{r_1^2 r_0^2} \log \frac{r_1}{r_0}\right).$$

Remarquons en passant que ces formules, avec $p = 0$, donnent la solution des problèmes de flexion des pièces circulaires soumises à l'action d'une force extérieure.

On a pour les déplacements u, v, w d'un point de l'arc suivant le rayon vecteur, la tangente à la fibre circulaire, et la normale à ces deux directions,

$$w = \alpha z, \qquad u = u_1 + u_2 \cos\varphi, \qquad v = v_1 + v_2 \sin\varphi$$

avec

$$\begin{aligned}
E(u_1 - m\alpha r) &= a(1+m)(1-2m)r - \frac{b}{r}(1-m) \\
&\quad + c(1+m)(1-2m) r \log r - c(1-m^2) r, \\
E v_1 &= 2rc(1-m^2)\varphi, \\
E u_2 &= \frac{(1-4m)(1+m)}{2} dr^2 - \frac{1+m}{2}\frac{f}{r^2} \\
&\quad + (1+m)(1-2m) e \log r - 2e(1-m^2)(1 - \varphi \operatorname{tang}\varphi), \\
E v_2 &= \frac{(5-4m)(1+m)}{2} dr^2 - \frac{1+m}{2}\frac{f}{r^2} \\
&\quad - (1+m)(1-2m)e(\log r - 1) + 2e(1-m^2)\frac{\varphi}{\operatorname{tang}\varphi}.
\end{aligned}$$

Dans ces expressions, les quantités F et Fd figurent sous forme linéaire; on peut donc écrire les deux équations habituelles d'encastrement et déterminer ainsi F et d. On disposera du paramètre α de façon que $\int_{r_0}^{r_1} N'' dr$, somme des pressions verticales, soit égale à C, valeur donnée à l'avance.

MÉTÉOROLOGIE. — *Contribution à l'étude du mistral. L'accélération.* Note [1] de MM. D. **Faucher** et E. **Rougetet**, présentée par M. Deslandres.

Le mistral est surtout caractérisé par sa violence. Mais sa vitesse est variable, suivant le moment considéré et suivant les lieux. Un de ses traits les plus originaux, c'est son irrégularité.

---

[1] Séance du 17 août 1925.

Il a paru qu'il serait intéressant de rechercher l'ordre de grandeur des changements de vitesse d'un point à un autre au même moment, et de déterminer, dans l'espoir de découvrir la cause de ces variations, en quels lieux se produisaient les accélérations de ce vent.

Nous avons pu, avec quelques concours bénévoles, organiser dans le courant de 1924-1925 des observations de vitesse à l'aide d'anémomètres à main prêtés par l'Office National météorologique. Ces anémomètres ont tous été comparés avec soin à la girouette-anémo totalisateur Richard, de la station météorologique de Montélimar-Ancône.

L'un de nous (M. D. Faucher) ayant émis l'hypothèse que les plaines qui se succèdent dans la partie moyenne de la vallée pouvaient influer sur l'accélération et même sur la formation du mistral, les observations ont été faites simultanément en un certain nombre de points choisis pour mettre en évidence le rôle respectif des défilés et des bassins.

C'est ainsi que la station d'Ancône étant considérée comme station de base, des mesures ont été faites en séries de plusieurs jours à 9^h et 15^h, à Saint-Vallier, dans le défilé où le Rhône s'engage un peu au nord de cette ville et dont il ne sort qu'à Tain-Tournon. En même temps d'autres observateurs opéraient à Chanos-Curson, à l'école des Chassis à 5^{km} au sud-est de Tain, à Beaumont-Monteux près de l'Isère et entre Valence et Chabeuil, à la ferme de la Trésorerie. Tous les points avaient été choisis sur un espace découvert, mais on a dû éliminer les observations faites près de Chanos-Curson, la vitesse du vent s'y trouvant très fortement influencée par les collines qui s'étendent d'Ouest en Est de Mercurol à l'Herbasse, au nord du village.

De Saint-Vallier à Ancône nous avons donc pu observer le vent sur un parcours de 70^{km} environ. Le couloir rhodanien entre ces deux points extrêmes comprend des plaines reliées par des défilés.

Du Nord au Sud se présentent le défilé de Saint-Vallier-Tain, la plaine de Valence, le défilé de Cruas-Le Teil, la plaine de Montélimar. C'est donc dans une portion typique de la partie de la vallée du Rhône parcourue par le mistral que les recherches dont nous donnons ci-après les résultats ont été poursuivies.

Les observations que nous avons ainsi recueillies montrent toutes que dans la portion de la vallée du Rhône considérée, *le vent du gradient est rarement observé seul. Il s'y ajoute très régulièrement un certain coefficient d'accélération*. La vitesse du vent est donc la résultante de deux vitesses,

l'une déterminée par le gradient barométrique, c'est la vitesse théorique *ou vitesse du gradient*, l'autre causée par les conditions locales, orographiques et géologiques, nous pourrions l'appeler *vitesse orographique*. Lorsque ces deux vitesses s'ajoutent, le vent est plus fort qu'il ne devrait être d'après les seules conditions météorologiques. C'est ce que mettent en évidence les observations que nous avons faites, et dont nous citerons deux exemples.

1° Le 10 juillet 1924, la situation barométrique, favorable au mistral, est caractérisée par de hautes pressions (765^{mm}) sur le centre de la France, jusqu'à Lyon et un noyau de basses pressions (755^{mm}) sur la mer Tyrrhénienne et le golfe de Gênes (situation classique pour la formation du mistral).

Les vitesses suivantes sont observées :

	Saint-Vallier.	Montélimar.	Accélération (vitesse orographique).
	m	m	m
9 heures..................	6,30	9,50	3,20
15 heures..................	5,60	11,10	5,50

Or le vent du gradient calculé sur les observations barométriques de Lyon et de Montélimar-Ancône, aurait été à Montélimar de 8^m et de $6^m,50$. Les vitesses réelles $9^m,50$ et $11^m,10$ se rapprochent de celles ($11^m,20$ et 12^m) que donnent l'accélération constatée ajoutée à la vitesse théorique.

2° Plus typique encore est le cas du vent du Nord soufflant dans la vallée du Rhône avec une vitesse relativement forte sans que la situation barométrique générale soit de nature à l'expliquer. Ainsi, le 1er août 1924, la situation en Provence était celle d'un marais barométrique. Entre Lyon et Montélimar, le gradient faible accuse à 8^h G.M.T. un vent théorique de 3^m à Montélimar. Or Saint-Vallier note à 9^h un vent modéré de $4^m,8$; Montélimar enregistre un vent assez fort, 9^m.

C'est un cas typique de mistral engendré uniquement par des conditions propres à la vallée du Rhône.

L'état thermique des plaines rhodaniennes nous paraît être dans ce cas le facteur déterminant du vent du Nord. Chacune d'elles, grâce à la nature de son sol généralement perméable et favorable à l'évaporation est un centre de dépression. Les conditions orographiques ajoutent considérablement au pouvoir d'attraction des plaines pour les courants du Nord. Elles sont souvent en effet entourées de montagnes et de collines au flanc desquelles se concentre la chaleur et s'établissent des courants ascendants. Elles sont donc des foyers d'appel.

C'est ce phénomène qui explique du même coup : 1° l'accélération du vent du Nord engendré normalement par la situation barométrique générale ; 2° l'écoulement vers le Sud dans la vallée du Rhône des courants ayant

soufflé du golfe de Gascogne sur le bassin d'Aquitaine et le Massif Central (Théorie de M. Gazaud).

PHYSIOLOGIE. — *Au sujet de la marche dite « sur la pointe des pieds »*. Note de M. **Jules Amar**, présentée par M. d'Arsonval.

Nous avons, M. d'Arsonval, le regretté Gautiez et moi ([1]), établi les avantages considérables de la marche sur la pointe des pieds, comme on dit d'ailleurs à tort. De nouvelles précisions nous paraissent nécessaires.

1° Les données respiratoires et radiographiques témoignent qu'en marchant sur les avant-pieds, en appuyant plus sur les orteils que sur les talons, on redresse la colonne vertébrale, les côtes, et l'on met en jeu la *respiration thoracique*. Celle-ci l'emporte, au point de vue de l'hygiène et de l'esthétique, sur la *respiration abdominale*.

2° Si l'on fait marcher, à cadences de plus en plus rapides, sur une plaque de cire molle (*stent*), on constate que l'empreinte des orteils, de l'avant-pied, va en augmentant de profondeur. L'exercice, la course par exemple, qui tend à développer la respiration, pousse donc à employer le mode thoracique dans les conditions, et avec tout le profit que nous avions indiqués.

3° La marche avec souliers à *talons hauts* ne réalise nullement ces conditions; elle précipite les pas et déforme les pieds; ceux-ci gardent, néanmoins, *leur base totale*, du talon aux orteils, mais la base est un plan incliné. Cela est physiologiquement défectueux.

4° Enfin, la marche sur la pointe des pieds déforme la métatarse, exactement comme chez les danseuses.

Aussi avons-nous le regret de voir, à la campagne, de nombreuses personnes s'appliquer à marcher sur la pointe des pieds. Elles ont mal compris un conseil qui leur est donné dans une intention louable, et qui ne traduit pas réellement nos conclusions. Il faut bien se persuader que l'homme n'est pas absolument *onguligrade*; le centre de gravité d'un bipède ne l'autorise pas; le corps perdrait sa stabilité.

Par conséquent, voici la pratique à suivre :

Porter le corps en avant, la tête bien relevée, le jarret tendu, et marcher à 130 *pas à la minute. Cela, un quart d'heure le matin et autant le soir.*

([1]) *Comptes rendus*, 171, 1920, p. 363.

Un tel exercice accélère respirations et pulsations dans la mesure qui convient, et fait tomber le ventre, et, nous l'avons reconnu sur des hommes et des femmes de 40 à 50 ans, produit des effets heureux sur la digestion. Une légère transpiration se manifeste à la dixième minute.

En insistant sur ces faits, nous voulons montrer combien les données claires, simples, de la physiologie expérimentale, peuvent servir au progrès social.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Dosage biochimique de l'insuline.* Note [1] de M. **Fernand Wyss**. (Extrait.)

Les méthodes actuelles de dosage de l'insuline sont basées sur l'action physiologique de cette hormone. Pour rendre le dosage indépendant des variations individuelles que comportent les déterminations sur le lapin, il est nécessaire de se baser sur un dosage fait *in vitro*. Il peut être réalisé en utilisant les observations suivantes que j'ai fait connaître :

1° Le glucose est oxydé en acide lactique par l'eau oxygénée; en présence d'insuline, cette oxydation n'a pas lieu; 2° Les phénols sont oxydés par l'eau oxygénée; en présence d'insuline, cette oxydation est retardée ou inhibée, sauf en ce qui concerne les phénols polyvalents ayant deux hydroxyles en positions 1-2; 3° L'insuline prévient la formation des corps acétoniques, qu'elle résulte de l'oxydation et de la désamination des acides aminés, ou de l'oxydation de l'acide β-oxybutyrique.

Théoriquement, ces trois remarques pourraient servir de base pour établir une méthode de dosage de l'insuline *in vitro*. Pratiquement, une seule répond aux exigences suivantes : absence presque absolue de causes d'erreur, simplicité de la réaction, rapidité de la détermination.

Principe du dosage. — La protection exercée sur les phénols, vis-à-vis de l'oxydation, dépend de la quantité d'insuline présente ou, ce qui revient au même, toutes conditions restant égales, la protection est d'autant plus faible que l'oxydation est plus énergique.

Étalonnage préalable : Disposant d'une solution d'insuline titrée, dont 1^{cm^3} contient 10 unités cliniques, je dilue ce centimètre cube dans 19^{cm^3} d'eau, au $P_H = 7,5$. J'obtiens une solution contenant 0,5 unité par centimètre cube.

---

[1] Séance du 17 août 1925.

Je répartis, dans 8 tubes à essai, 1^{cm^3} d'une solution de résorcine à 0,2 pour 100, fraîchement préparée, et 1^{cm^3} de la solution d'insuline. Un tube témoin ne reçoit pas d'insuline. J'ajoute à ces tubes des quantités croissantes d'eau oxygénée ($0^{cm^3},25$; $0^{cm^3},50$; $0^{cm^3},75$; $1^{cm^3},25$; $1^{cm^3},50$; $1^{cm^3},75$; 2^{cm^3}, etc.) au tiers $\left(1^{cm^3} = 24^{cm^3} \text{ de } KMnO^4 \text{ à } \frac{N}{100}\right)$. Je complète tous les tubes à 5^{cm^3}, avec de l'eau au $P_H = 7,5$. Je les porte dans l'eau bouillante, et les y laisse 20 minutes. Après ce laps de temps, le témoin est brun, celui qui contient 2^{cm^3} d'eau oxygénée est aussi brun; le précédent ($1^{cm^3},75$) est incolore. Dans ces conditions, 0,50 unité d'insuline est neutralisée par 2^{cm^3} d'eau oxygénée. Une nouvelle expérience, avec le quart d'unité, montre qu'il est neutralisé de même par 1^{cm^3} d'eau oxygénée.

Deux techniques s'offrent dès lors pour la détermination de la valeur en insuline d'une solution x. La première prend comme facteurs invariables la concentration et la quantité de résorcine, la quantité d'eau oxygénée neutralisant le quart d'unité, la température, le P_H et le temps de réaction. Le facteur variable est la concentration en insuline de chaque tube.

La seconde méthode prend comme facteur variable la quantité d'eau oxygénée ajoutée. La quantité d'insuline est la même partout.

La séance est levée à 15h30m.

A. Lx.